

Extreme Biegung von Federstahldrähten

Moderne Materialien im Bereich der Federstahldrähte gestatten sehr große elastische Verformungen, die allerdings mit der linearen Biegetheorie nicht berechnet werden können. Erst die Anwendung der nichtlinearen Biegetheorie ermöglicht die Berechnung der Kraft-Weg-Kennlinie und die Bestimmung der Federbiegegrenze bei großen Durchbiegungen von Federstahldrähten. Eine zweite wichtige Aufgabe ist die Bestimmung des E-Moduls insbesondere an vorgekrümmten Drähten.

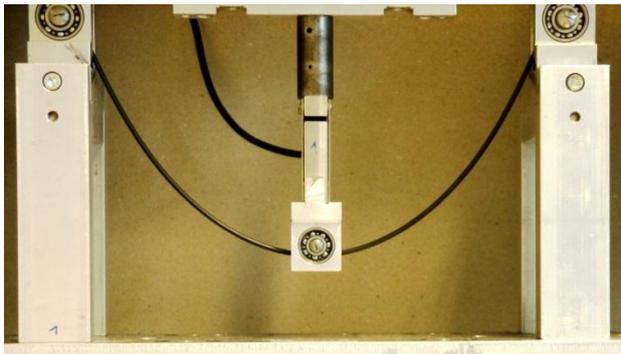


Bild 1: Extreme Biegung, VDSiCr, d=3mm

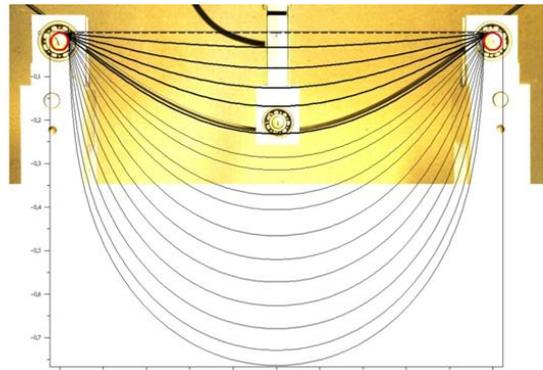


Bild 2: Übereinstimmung Theorie vs. Experiment

Einleitung

Die Forschungsgruppe Draht und Federn an der TU Ilmenau bearbeitete im Zeitraum 2009 bis 2011 das IGF-Vorhaben 16217 BR mit dem Titel "Funktions- und fertigungsrelevante Kennwerte für Federstahldraht und Federband". Eine Teilaufgabe dieses Themas beinhaltete den Themenkomplex "Biegung von Federstahldraht". Dieser Komplex ist in der industriellen Praxis von großer Bedeutung, da alle kaltgeformten Federn und Drahtformbiegeteile durch Biegung ihre Form erhalten. Ist zusätzlich das Biegeverhalten funktionsrelevant, ist die genaue Kenntnis der Parameter Federbiegegrenze und Biege-E-Modul erforderlich. Zur Ermittlung dieser Parameter sind sowohl theoretische als auch experimentelle Forschungsarbeiten nötig, über die im Folgenden berichtet wird.

Aufbau eines 3-Punkt-Biegeversuchsstandes

Zur experimentellen Überprüfung der Ergebnisse der nichtlinearen Biegetheorie und zur Ermittlung des Biege-E-Modules wurde folgender 3-Punkt-Biegeversuchsstand aufgebaut:

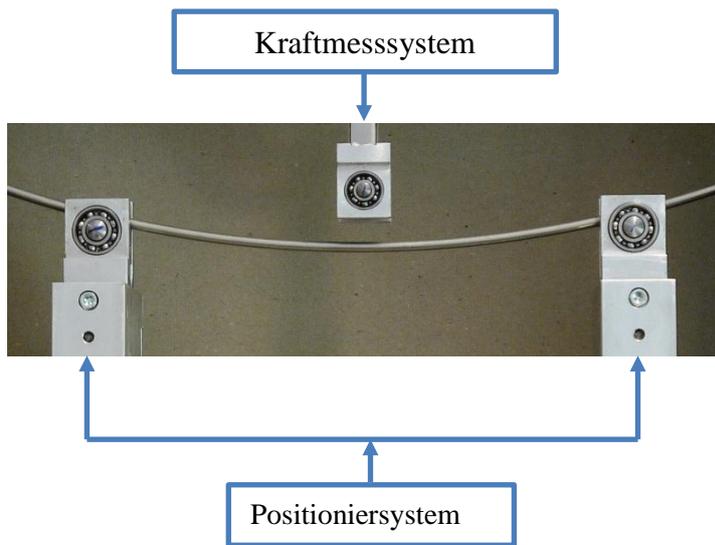


Bild 3: 3-Punkt-Biegeversuchsstand

Das Kraftmesssystem hat einen Messbereich bis 200 N, die Anzeige des Positioniersystems löst bis in den Mikrometerbereich auf. Zur Verringerung des Reibungseinflusses werden an allen Berührungspunkten zum Draht Kugellager eingesetzt.

Extreme Biegungen – nichtlineare Biegetheorie

Für den 3-Punkt-Biegeversuchsstand gilt nachfolgendes physikalisches Modell.

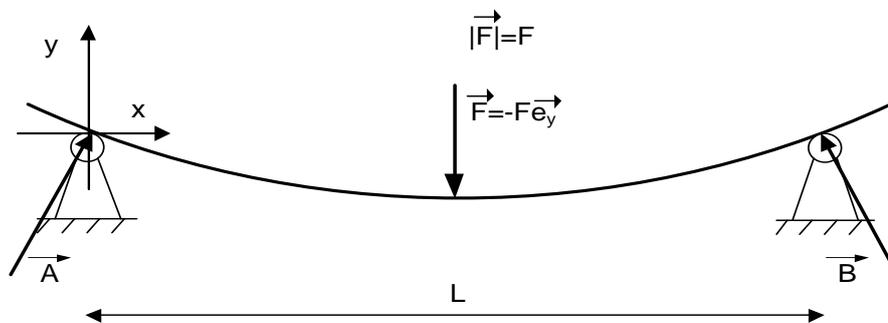


Bild 4: Physikalisches Modell des 3-Punkt-Biegeversuchsstandes

Für das Intervall $0 < x < L/2$ lautet die entsprechende Gleichung der nichtlinearen Biegetheorie:

$$\frac{v_1''}{(1 + v_1'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \frac{F}{2} \cdot (v_0' \cdot v_1(x) + x)$$

Die Symbole bedeuten:

- $v_1(x)$ die Verschiebung an der Stelle x ($v(x) \leq 0$)
- E Elastizitätsmodul

- d Drahtdurchmesser
- I_Z Äquatoriales Flächenträgheitsmoment
- L Lagerabstand
- F Betrag der äußeren Kraft
- v'₀ Steigung der Biegelinie bei x = 0

Für das zweite Intervall gibt es eine entsprechende Differentialgleichung.

Das nichtlineare Differentialgleichungssystem wurde numerisch integriert. Als Lösungssoftware wurde MAPLE 12 verwendet.

Damit können die Versuchsergebnisse (Kraft-Weg-Kennlinien) der extremen Biegungen mathematisch ausgewertet werden!

Die numerischen Lösungen des MAPLE-Programmes liegen in einer normierten Form vor, d.h., sie sind **nicht** von den Abmessungen des Versuchsstandes oder den Abmessungen der Versuchsobjekte abhängig! Damit ist eine weitgehende Allgemeingültigkeit der theoretischen Ergebnisse gesichert.

Die verwendeten Normierungen enthält das folgende Bild 5.

Größe	Einheit	Beispiel
<i>Länge, Verschiebung</i>	L	$X = L \cdot x, L = L \cdot 1, V = L \cdot v$
<i>Anstieg, Winkel</i>	1	$\frac{dY}{dX} = 1 \cdot \frac{dy}{dx}, \phi = 1 \cdot \varphi$
<i>Krümmung</i>	L ⁻¹	$\frac{d\phi}{ds} = L^{-1} \cdot \frac{d\varphi}{ds}$
<i>Kraft</i>	$\frac{2EI_Z}{L^2}$	$F = \frac{2EI_Z}{L^2} \cdot f$
<i>Moment</i>	$\frac{EI_Z}{L}$	$M_Z = \frac{EI_Z}{L} \cdot m$

Bild 5: Übersicht zu den MAPLE-Normierungen

Bild 6 zeigt ein Beispiel der Berechnung einer extremen Biegung bei der Verwendung von Kugellagern als Auflager für den Federstahldraht.

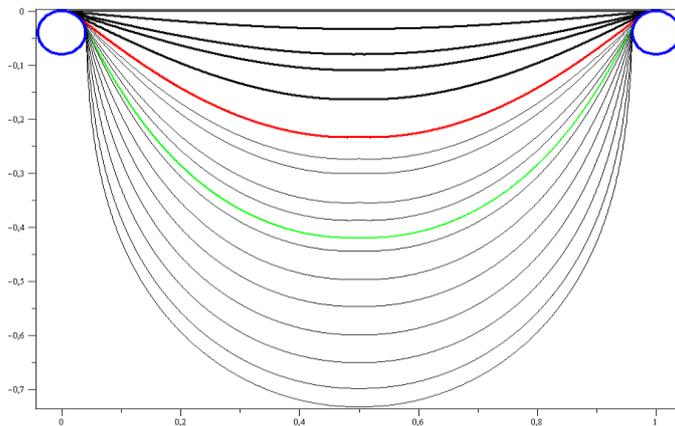


Bild 6: Extreme Biegung auf Kugellagern, Rot: Durchbiegung bei der Maximalkraft (siehe Bild 7), Grün: Durchbiegung beim maximalen Moment (vgl. auch Bild 2)

Experimentelle Anwendung der nichtlinearen Theorie

Eine beispielhafte Anwendung der Theorie zeigt nachfolgende Messung.

Messobjekt:

Material: OTEVA 70, VDSiCr, Drahtdurchmesser $d = 2,992 \text{ mm}$

Die ausgezeichnete Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung zeigt das Bild 7.

Interessant ist auch, dass es ein Kraftmaximum gibt!

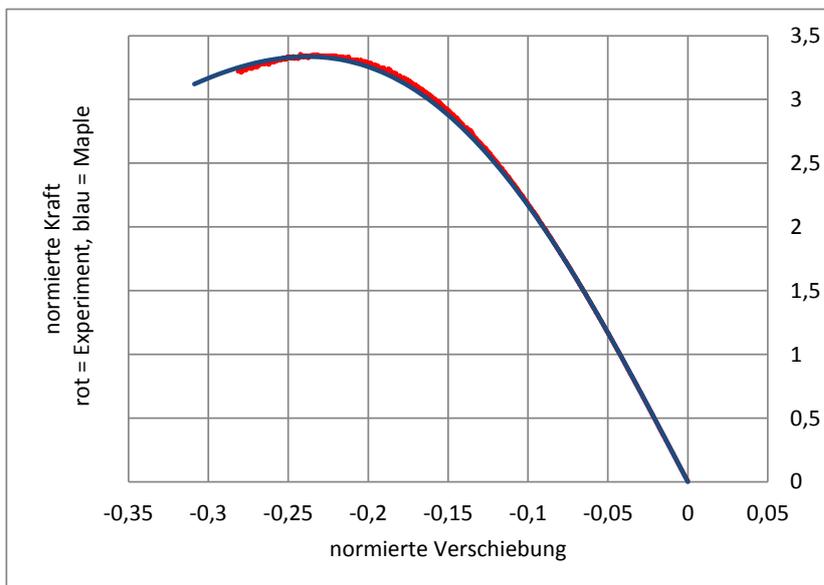


Bild 7: Extreme Durchbiegung von Federstahldraht: Theorie vs. Experiment

Praxisgerechte Berechnung der Kraft-Weg-Kennlinie

Zur praxistauglichen Verwendung der Ergebnisse der numerischen Integration des Differentialgleichungssystems in MAPLE wurde die normierte Lösung mittels einer Polynom-Approximation einer leichten Anwendung in Excel zugeführt.

Die praxisgerechte Formel für die Kraft-Weg-Kennlinie für extreme Biegungen lautet:

$$F = \frac{2EI_z}{L^2} f(\rho, v)$$

Die Polynom-Approximation $f(\rho, v)$ hat die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} f(\rho, v) = & (-23,4793 - 34,152 * \rho + 2,55363 * \rho^2) * v \\ & + (212,57 - 48,056 * \rho - 3313,09 * \rho^2) * v^3 \\ & + (-950,9 + 1801,88 * \rho + 37516,4 * \rho^2) * v^5 \\ & + (2207,9 - 6175,59 * \rho - 1,49267 * 10^5 * \rho^2) * v^7 \\ & + (-2055,41 + 5960,89 * \rho + 2,0214 * 10^5 * \rho^2) * v^9 \end{aligned}$$

mit dem Lagerparameter $\rho = \frac{D+d}{2} \cdot \frac{1}{L}$; (D=Kugellagerachsdurchmesser).

Fazit: Damit kann für eine geforderte Durchbiegung v am Kraftangriffspunkt die erforderliche Kraft F auch für extreme Biegungen berechnet werden.

Berechnung der Biegespannung bei extremen Durchbiegungen

Prinzip:

Zur Berechnung der maximalen Biegespannung in der Randfaser (linearer Spannungsverlauf im Querschnitt) wurden die exakten numerischen Ergebnisse von MAPLE durch ein Polynom vierten Grades approximiert.

Entsprechend den Normierungen nach Bild 5 gilt für das Biegemoment die Gleichung

$$M_z = \frac{EI_z}{L} \cdot m(v, \rho)$$

und somit für die Biegespannung in der Außenfaser

$$\sigma = \frac{M_z}{W_b} = \frac{EI_z}{W_b L} \cdot m(v, \rho)$$

Die Größe m wurde mit MAPLE berechnet und in guter Approximation als Polynom vierten Grades zur Verfügung gestellt.

Das Polynom lautet:

$$m(v, \rho) \approx -(11.92 + 12.90 \cdot \rho) \cdot v + (55.49 - 91.03 \cdot \rho) \cdot v^3 + (62.81 - 220.2 \cdot \rho) \cdot v^4$$

Damit kann man nach einer experimentell ermittelten elastischen Verformung v die dazugehörige Biegespannung berechnen. Ist diese Verformung die maximal zulässige elastische Verformung, heißt die zugehörige Biegespannung die "**Federbiegegrenze**".

Ermittlung des E-Moduls

Zur Ermittlung des Biege-E-Moduls wird mit dem 3-Punkt-Biegeversuchsstand immer eine Kraft-Weg-Kennlinie bei **kleinen** Durchbiegungen aufgenommen. Aus dem Anstieg der Kraft-Weg-Kennlinie kann der E-Modul berechnet werden. Das Problem ist, dass aus der linearen Biegetheorie nur eine Formel für den geraden Stab zur Berechnung des E-Moduls vorliegt. Neu in diesem Beitrag ist die Angabe einer Formel für eine Messung an einem vorgekrümmten Stab - siehe Bild 8 -, z.B. also für patentiert gezogenen Draht oder nichtrostenden Draht.

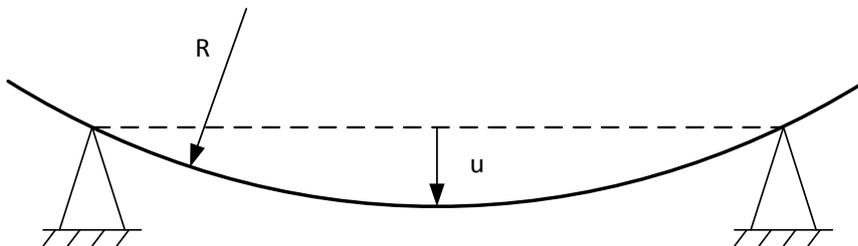


Bild 8: Stab mit Vorkrümmungsradius R und Kreisabschnittshöhe u

Theorie zur Ermittlung des E-Moduls an vorgekrümmten Stäben

Patentiert gezogene und nichtrostende Federstahldrähte sind auf Grund ihrer Herstellungstechnologie texturiert und vorgekrümmt. Es ist eine interessante Aufgabenstellung, den Biege-E-Modul auch am vorgekrümmten Draht zu ermitteln, um eine Eigenschaftsänderung durch einen Richtprozess zu vermeiden.

Unter Nutzung von MAPLE wurde an der TU Ilmenau eine Formel entwickelt, die es gestattet, den E-Modul sowohl für gerade als auch für vorgekrümmte Stäbe zu berechnen. Ebenso wird auch der Einfluss der Kugellager berücksichtigt.

Die Lösungsformel lautet:

$$E = W(\rho, u) \cdot \frac{L^3}{2 \cdot I_z} \cdot \frac{dF}{ds}$$

$\frac{dF}{ds}$ ist der Anstieg der im 3-Punkt-Biegeversuch gemessenen linearen Kraft-Weg-Kennlinie im Bereich kleiner Durchbiegungen.

Wichtig ist der Faktor W , der als Funktion des Lagerparameters ρ und als Funktion der normierten Kreisabschnittshöhe u (als Maß für die Vorkrümmung des Drahtes – vgl. Bild 8) folgendermaßen angegeben werden kann.

$$W(\rho, u) \approx 0.0416 + (-0.0118 + 1.05\rho - 0.152\rho^2)u + (0.505 + 1.42\rho + 3.9\rho^2)u^2 + (-3.42 + 27.7\rho - 36.8\rho^2)u^3$$

Durchführung einer Beispielmessung zum E-Modul

Nachfolgend ein Beispiel für die E-Modul-Messung an einem auf Kugellagern gelagerten vorgekrümmten Draht.

Material: Patentiert gezogener Federstahldraht, Sorte SH.

Bild 9 zeigt das Messobjekt.

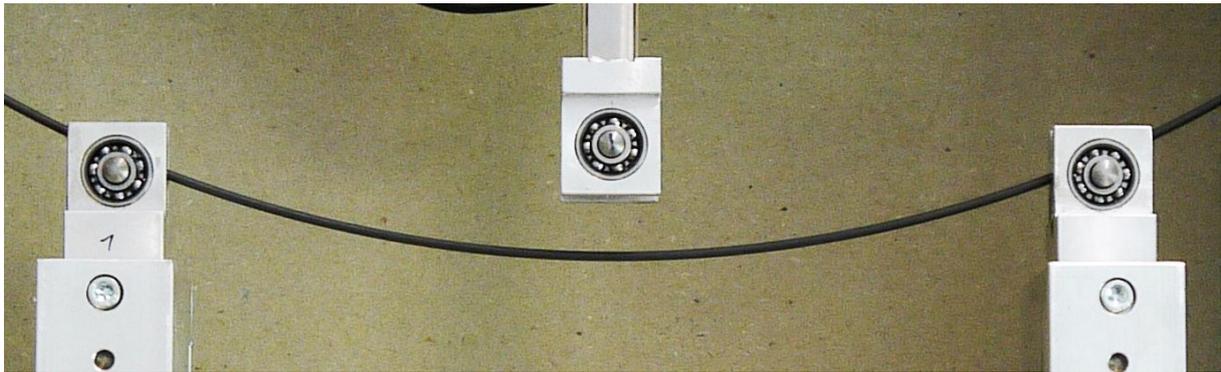


Bild 9: Vorgekrümmter Draht, patentiert gezogen, Sorte SH

Aus der Ausgangslage (Nulllage) nach Bild 9 wird eine Kraft-Weg-Kennlinie nach Bild 10 aufgenommen. Zuerst bewegt sich das Kraftmesssystem von der Nulllinie bis zum Berühren des Drahtes, dann erfolgt die Verformung. Aus der Messung wird somit die Kreisabschnittshöhe u und der Anstieg der Kraft-Weg-Kennlinie ermittelt.

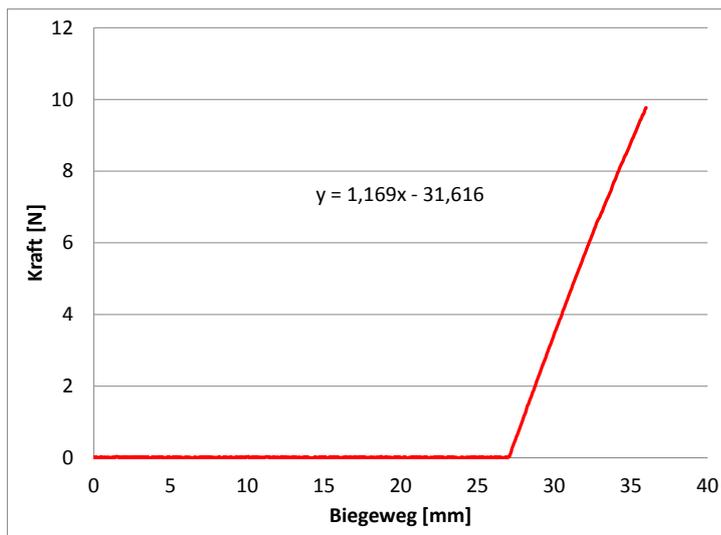


Bild 10: Kraft-Weg-Kennlinie eines Drahtes der Sorte SH

Versuchsbedingungen:

Drahtsorte SH, $d = 2,994 \text{ mm}$, Lagerparameter $\rho = 18,32 \cdot 10^{-3}$

Ergebnisse:

Kreisabschnittshöhe $u = 30,039$ mm, Anstieg der Kraft-Weg-Kennlinie: $1,169$ N/mm
Faktor $W = 0,04942$.

Damit folgt ein E-Modul von:

$$E = 193000 \frac{N}{mm^2}$$

Fazit:

Mit den erreichten theoretischen Ergebnissen lassen sich nun auch die E-Moduli für die vorgekrümmten Drähte sehr gut aus dem Anstieg der Kraft-Weg-Kennlinie ermitteln.

Zusammenfassung

Mit dem prinzipiell einfachen konstruktiven Aufbau des 3-Punkt-Biegeversuches, der ja den Vorteil hat, dass es keinerlei Einspannstellen für den Versuchsdraht gibt, und den praxisgerecht aufbereiteten Lösungen der nichtlinearen Biegetheorie steht somit eine Versuchsanlage zur exakten Bestimmung einer Kraft-Weg-Kennlinie, zur Ermittlung der Biegespannung (Randfaserspannung) - speziell der Federbiegegrenze - und zur Messung von E-Moduli - auch an vorgekrümmten Drähten - zur Verfügung.

Mathias Weiß, Joachim Steigenberger, Veronika Geinitz, TU Ilmenau

TU Ilmenau

Fakultät für Maschinenbau

Postfach 100565, 98684 Ilmenau

Tel.: +49 3677 69-2478

Fax: +49 3677 69-1823

E-Mail: mathias.weiss@tu-ilmenau.de

Internet: www.tu-ilmenau.de

Gefördert durch:



aufgrund eines Beschlusses
des Deutschen Bundestages

Das IGF-Vorhaben 16217 BR der Forschungsvereinigung Forschungsgesellschaft Stahlverformung wurde über die AiF im Rahmen des Programms zur Förderung der industriellen Gemeinschaftsforschung und -entwicklung (IGF) vom Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie aufgrund eines Beschlusses des Deutschen Bundestages gefördert. Die Langfassung des Abschlussberichtes kann bei der FSV, Goldene Pforte 1, 58093 Hagen, angefordert werden.